TUTORATO ALGEBRA LINEARE - 10/04/25

CORREZIONE FOGLIO 3

Ingredienti $A \in M(n, \mathbb{R})$ (o anche $A \in M(n, \mathbb{C})$)

- Polinomio caratteristico: $p_A(t) = \det(A - tI)$

  → Autovalori di A : le radici di $p_A(t)$

  → Autovettori per A relativi all'autovalore λ :
  soluzioni del sistema $Av = \lambda v$, cioè $\underbrace{(A - \lambda I) v = 0}$.

- AUTOSPAZIO relativo all'autovalore λ : $V_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

- MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore λ : $m_{geo}(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Ricetta [Teorema di diagonalizzabilità (reale) (complesso)] :

La matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$ ($\mathbb{C}$) è diagonalizzabile se e solo se

- $p_A(t)$ ammette n radici (contate con molteplicità) reali (complesse)
  ↳ molt. algebrica (m_{alg})
- Per ogni λ radice di $p_A(t)$, vale

$$m_{alg}(\lambda) = m_{geo}(\lambda).$$

Risultato utile : Per ogni λ autovalore di A vale

$$1 \leq m_{geo}(\lambda) \leq m_{alg}(\lambda)$$

NON LO USEREMO

Risultato (fondamentale) : TEOREMA SPETTRALE REALE

$$A \text{ simmetrica} \Rightarrow A \text{ diagonalizzabile}$$

meglio: esiste una base ORTOGONALE (ORTONORMALE) di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori per A.

Esercizio 3. Decidere se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$? Nel caso positivo determinare una base di autovettori.

Soluzione

[Risposta rapida: sì, Teorema spettrale.]

- Autovalori di A.

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t) \det \begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$= (1-t)\left[(3-t)^2 - 1\right]$$

$$= (1-t)(2-t)(4-t)$$

Autovalori: $1, 2, 4$ con molt. alg. $1, 1, 1$ rispettivamente.

Poiché $1 \leq m_{geo} \leq m_{alg}$, le molt. geom. sono tutte uguali a 1.

$\Rightarrow$ A DIAGONALIZZABILE su $\mathbb{R}$ (e quindi anche su $\mathbb{C}$)

- Autovettori

$\lambda = 1$)

$$\ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & 0 \\ -1 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ libera} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ libera} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2)$ $\quad \ker(A-2I) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow V_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda = 4)$ $\quad \ker(A-4I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow V_4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Conclusione: una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori per A è data da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>OSS.</u> In effetti, la base trovata è ORTOGONALE (risp. al prodotto scalare standard) verificare!

NON è ortonormale $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$

per renderla ortonormale basta considerare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 2. Si considera la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 7 & 6 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(1) Per quali valori di a la matrice ammette 4 autovalori distinti?
(2) Per quali valori di a la matrice ammette un autovalore di molteplicità algebrica 3?
(3) Per quali valori di a la matrice ammette un autovalore di molteplicità geometrica 3?

Soluzione

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -t & a & 7 \\ -3 & 4-t & 2 \\ 0 & 0 & 3-t \end{matrix}} & \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 3-t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

conviene sviluppare rispetto questa riga

$$= (-1)^{4+4}(3-t) \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -t & a \\ -3 & 4-t \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 3-t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

di nuovo

$$= (-1)^{3+3}(3-t)(3-t) \det \begin{pmatrix} -t & a \\ -3 & 4-t \end{pmatrix}$$

$$= (3-t)^2 \left(-t(4-t) + 3a \right) = (3-t)^2 \left(t^2 - 4t + 3a \right).$$

$m_{alg}(3) \geq 2$

(1) Per nessun valore di a.

(2) Se $p_A(t)$ ha una radice di molt. alg. 3, allora questa radice deve essere necessariamente $\underline{t = 3}$.

Radici di $p_A(t)$: $\quad 3, 3, \underbrace{\lambda_3, \lambda_4}_{\text{radici di } t^2 - 4t + 3a}$

Quindi dobbiamo imporre che $t^2 - 4t + 3a$ ammetta 3 come <u>radice semplice</u>. $\to m_{alg} = 1$

$$3^2 - 4\cdot 3 + 3a = 0$$

$$\begin{cases} 3 \text{ è radice} \\ 3 \text{ è radice semplice} \end{cases} \iff \begin{cases} 9-12+3a=0 \\ \Delta = 16-12a>0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ 4>0 \ \checkmark \end{cases}$$

$\Delta \neq 0$

(dato che 3 è radice, ciò è equivalente a $\Delta > 0$)

$t^2 - 4t + 3a$, $\Delta = 4^2 - 4\cdot 3a$

Osserviamo che in effetti si ha $t^2-4t+3 = (t-3)(t-1)$.

Risposta per (2): $a=1$.

(3) Se esiste un autovalore λ di molteplicità GEOMETRICA 3, allora $m_{alg}(\lambda) \geq m_{geo}(\lambda) = 3$.

Per quanto visto prima, l'unico λ possibile è 3, che si ottiene per $a=1$. Ma NON è detto che $m_{geo}(3)=3$: verifichiamolo!

Determiniamo $m_{geo}(3) = \dim \operatorname{Ker}(A-3I)$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & 6 \\ -3 & 4-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 PIVOT

$\Rightarrow A-3I$ ha rango 3

$\Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Ker}(A-3I)}_{m_{geo}(3)} = 4-3 = 1 \neq 3$

Risposta per (3): per nessun valore di a.

Esercizio 1. Per le matrici seguenti
a) determinare gli autovalori e autovettori;
b) decidere se la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;

Vedremo solo le prime due; le altre la prossima volta.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & a+2 & 0 \\ a & -2 & a^2-1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Soluzione

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ -2 & -2 & -2-t \end{pmatrix}$

SARRUS

$$= -(1-t)^2(2+t) - 2 - 2 + 2(1-t) + 2(1-t) + 2 + t$$
$$= -(1-t)^2(2+t) - 3t + 2$$
$$= -(t^3 \cancel{-2t^2} \cancel{+t} \cancel{+2t^2} \cancel{-4t} \cancel{+2}) \cancel{-3t} \cancel{+2}$$
$$= -t^3.$$

Autovalori: $t = 0$ $\quad m_{alg}(0) = 3$.

Autovettori: $V_0 = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + y + z = 0$
y libera
z libera

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_0 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$m_{geo}(0) = \dim V_0 = 2 < 3 = m_{alg}(0) \Rightarrow$ A NON è diagonalizzabile.

OSS. Potevamo dirlo subito: $m_{geo}(0) = 3 \iff \dim \ker A = 3$
$\iff \ker A = \mathbb{R}^3$
$\iff A = 0$ (è la matrice nulla) che non è vero

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$

$$P_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & a & 0 \\ 1 & a-t & 1 \\ 0 & -a & 1-t \end{pmatrix} \overset{\text{SARRUS}}{=} (1-t)^2(a-t) + \cancel{a(1-t)} - \cancel{a(1-t)}$$

$$= (1-t)^2(a-t)$$

Autovalori di B : $1, a$

$$m_{alg}(1) = \begin{cases} 2 & , a \neq 1 \\ 3 & , a = 1 \end{cases}$$

Autovettori: (lo facciamo prima in generale e poi sostituiamo $t=1$ e $t=a$)

$$B - tI = \begin{pmatrix} 1-t & a & 0 \\ 1 & a-t & 1 \\ 0 & -a & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & a-t & 1 \\ 1-t & a & 0 \\ 0 & -a & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - (1-t)R_1} \begin{pmatrix} 1 & a-t & 1 \\ 0 & a-(1-t)(a-t) & t-1 \\ 0 & -a & 1-t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & a-t & 1 \\ 0 & -(1-t)(a-t) & 0 \\ 0 & -a & 1-t \end{pmatrix}$$

$\circledast$

$t=1$: $\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ -ay = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ DIPENDE da: $a=0$ oppure $a \neq 0$

$t=a$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + z = 0 \\ -ay + (1-a)z = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ anche qui dipende da a

• CASO $a = 0$.

V_1) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y, z \text{ libere} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad m_{geo}(1) = \dim V_1 = 2 = m_{alg}(1)$$

$V_a = V_0$) $\begin{cases} x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z = 0 \\ y \text{ libera} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_0 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad m_{geo}(0) = 1 = m_{alg}(0)$$

già lo sapevamo
$1 \leq m_{geo}(0) \leq 1 = m_{alg}(0)$

Quindi, per $a=0$ la matrice B è diagonalizzabile.

• CASO $a \neq 0$.

V_1) $\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_1 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad m_{geo}(1) = 1 < \underbrace{m_{alg}(1)}_{\in\{2,3\}}$$

$\Rightarrow B$ NON è diagonalizzabile.

V_a) $\begin{cases} x + z = 0 \\ -ay + (1-a)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = \frac{1-a}{a} z \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ (1-a)/a \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_a = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ (1-a)/a \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -a \\ 1-a \\ a \end{pmatrix}\right).$$

NOTARE CHE È COERENTE PER $a = 1$: $V_a = V_1$.

Risposta: B è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$.